Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 8x.$$

i) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής (c).

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_1, y_1)$ της παραβολής (c) από την εστία της E είναι

$$(ME) = |x_1 + 2|.$$

iii) Να αποδείξετε ότι η κορυφή της παραβολής (c) είναι το πλησιέστερο προς την εστία σημείο της.

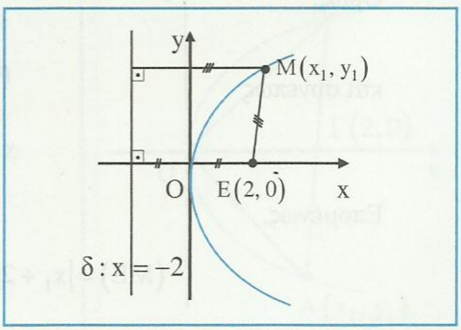
Λύση

i) Η εξίσωση της παραβολής (c) είναι της μορφής $y^2 = 2px$. Έχουμε λοιπόν

$$2p = 8 \Leftrightarrow p = 4.$$

Άρα, η παραβολή (c) έχει εστία το σημείο $E(2, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία

$$\delta : x = -2.$$



ii) **α΄ τρόπος:**
Έχουμε

$$(ME) = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (y_1 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4 + y_1^2}.$$

Όμως, το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής (c). Άρα, οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την εξίσωση της (c). Δηλαδή, ισχύει

$$y_1^2 = 8x_1.$$

Επομένως,

$$(ME) = \sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 4 + 8x_1}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + 4x_1 + 4}$$
$$= \sqrt{(x_1 + 2)^2}$$
$$= |x_1 + 2|.$$

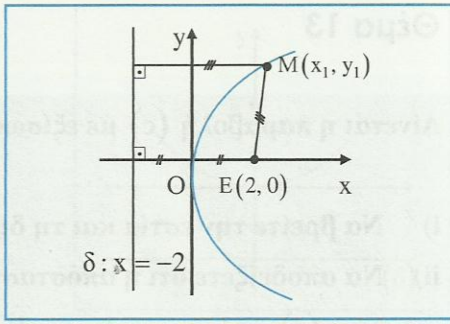
Την πληροφορία ότι το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή (c) μπορούμε να την αξιοποιήσουμε με δύο τρόπους:

- Να απαιτήσουμε οι συντεταγμένες του σημείου M να επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.
- Να παρατηρήσουμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, το σημείο M ισαπέχει από την εστία E και τη διευθετούσα (δ).

β΄ τρόπος:

- Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής έχουμε

$$(ME) = d(M, \delta)$$



Όμως,

$$M(x_1, y_1)$$

και

$$\delta : x = -2 \Leftrightarrow x + 2 = 0.$$

Επομένως,

$$d(M, \delta) = \frac{|x_1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x_1 + 2|.$$

Δηλαδή,

$$(ME) = |x_1 + 2|.$$

iii) Έχουμε

$$(ME) = |x_1 + 2|.$$

Όμως,

$$y_1^2 = 8x_1$$

και συνεπώς

$$x_1 = \frac{y_1^2}{8} \geq 0.$$

Επομένως,

$$(ME) = |x_1 + 2| = \left|\frac{y_1^2}{8} + 2\right| = \frac{y_1^2}{8} + 2 \geq 2.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$$y_1 = 0 \text{ και } x_1 = 0.$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της απόστασης (ME) είναι ίση με 2 και επιτυγχάνεται όταν οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $(0, 0)$. Δηλαδή, όταν το σημείο M συμπέσει με την κορυφή $O(0, 0)$ της παραβολής (c).

Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση

$$y^2 = 2x.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της (c) όταν:

i) είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x - 2y + 5 = 0$$

ii) διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$.

Λύση

i) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης ευθείας (ζ). Η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι

$$yy_1 = x + x_1.$$

Όμως,

$$\zeta // \varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y_1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 2 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή (c). Επομένως,

$$y_1^2 = 2x_1 \qquad \textbf{(2)}$$

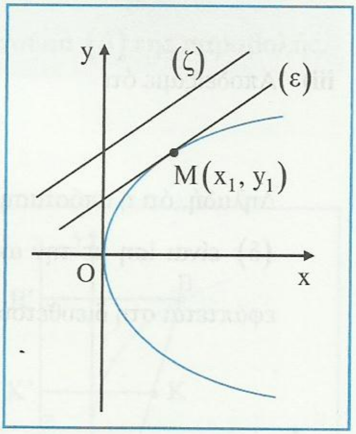
Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$(x_1, y_1) = (2, 2).$$

Άρα, η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση

$$2y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0.$$



Η εφαπτομένη της παραβολής

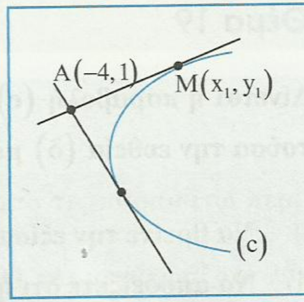
$$y^2 = 2px$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Για να βρούμε λοιπόν την εξίσωση της εφαπτομένης μιας παραβολής, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

ii) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης ευθείας (η). Η εξίσωση της ευθείας (η) είναι



$$yy_1 = x + x_1.$$

Η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(-4,1)$.

Επομένως, ισχύει η σχέση

$$y_1 = -4 + x_1 \qquad (1)$$

Επίσης, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή (c). Άρα, ισχύει η σχέση

$$y_1^2 = 2x_1 \qquad (2)$$

Η σχέση **(2)** λόγω της σχέσης **(1)** γράφεται

$$(-4 + x_1)^2 = 2x_1$$

$$\Leftrightarrow 16 + x_1^2 - 8x_1 = 2x_1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 10x_1 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad ή \quad x_1 = 8.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$(x_1, y_1) = (2, -2) \quad ή \quad (x_1, y_1) = (8, 4).$$

Άρα, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

$$y \cdot (-2) = x + 2 \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$$

και

$$y \cdot 4 = x + 8 \Leftrightarrow x - 4y + 8 = 0.$$

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Να βρείτε:

i) τις κορυφές της έλλειψης (c)

ii) τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)

iii) τις εστίες της έλλειψης (c)

iv) την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

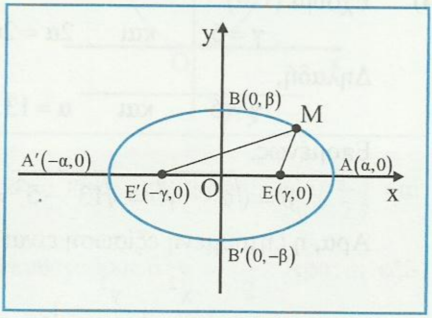
Λύση

i) Η εξίσωση

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



Παρατηρούμε ότι $9 > 4$ και συνεπώς

$$\alpha^2 = 9 \quad \text{και} \quad \beta^2 = 4.$$

Δηλαδή,

$$\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = 2.$$

Άρα, οι κορυφές της έλλειψης είναι τα σημεία

$$A'(-3,0), \quad A(3,0), \quad B'(0,-2) \quad \text{και} \quad B(0,2).$$

ii) Η έλλειψη (c) έχει μεγάλο άξονα το τμήμα $A'A$ με μήκος $(A'A) = 2\alpha = 6$ και μικρό άξονα το τμήμα $B'B$ με μήκος $(B'B) = 2\beta = 4$.

iii) Από τη σχέση $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 3^2 - 2^2 = 5.$$

Δηλαδή, $\gamma = \sqrt{5}$. Άρα, οι εστίες της έλλειψης (c) είναι τα σημεία

$$E'\left(-\sqrt{5}, 0\right) \quad \text{και} \quad E\left(\sqrt{5}, 0\right).$$

iv) Η έλλειψη (c) έχει εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

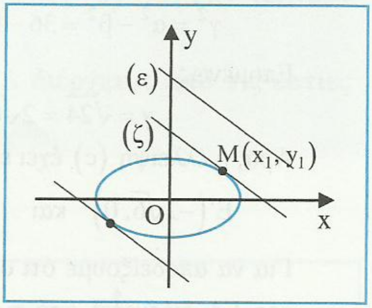
$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1.$$

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης (c) οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$x+y-10=0.$$

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση d των εφαπτομένων που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Λύση



i) Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής ζητούμενης ευθείας (ζ). Η εξίσωση της ευθείας (ζ) είναι

$$\frac{xx_1}{12}+\frac{yy_1}{4}=1.$$

Γνωρίζουμε ότι η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε). Επομένως,

$$\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\frac{x_1}{12}}{\frac{y_1}{4}}=-1 \Leftrightarrow x_1=3y_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης, το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη (c). Άρα, ισχύει η σχέση

$$\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{4}=1 \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι

$$(x_1, y_1)=(3,1) \quad ή \quad (x_1, y_1)=(-3,-1)$$

Επομένως, το πρόβλημα έχει δύο λύσεις. Τις ευθείες με εξισώσεις

$$\frac{x\cdot 3}{12}+\frac{y\cdot 1}{4}=1 \Leftrightarrow x+y-4=0 \quad και \quad \frac{x\cdot(-3)}{12}+\frac{y\cdot(-1)}{4}=1 \Leftrightarrow x+y+4=0.$$

Για να βρούμε την εφαπτομένη της έλλειψης αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες (x_1, y_1) του σημείου επαφής.

ii) Είναι φανερό ότι η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με την απόσταση του σημείου $M(3,1)$ της ευθείας $x+y-4=0$ από την ευθεία $x+y+4=0$. Δηλαδή,

$$d=\frac{|3+1+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

Δίνεται η υπερβολή (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$$

και το σημείο της $M(4,1)$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής (c) στο σημείο Μ.

iii) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής στα σημεία Κ και Λ, τότε:

α) να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσο του ΚΛ

β) να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Λύση

i) Έχουμε

$$\alpha^2=12 \quad \text{και} \quad \beta^2=3.$$

Δηλαδή,

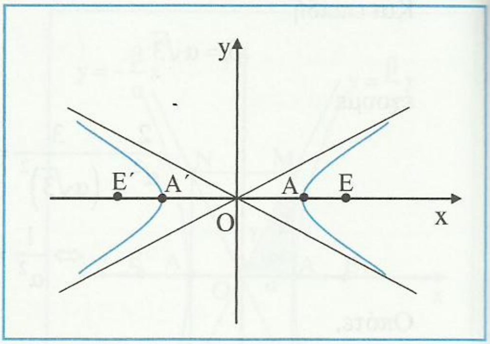
$$\alpha=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \beta=\sqrt{3}.$$

Άρα, οι ζητούμενες ασύμπτωτες είναι οι ευθείες με εξισώσεις

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$$

και

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x.$$



Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

είναι οι ευθείες με εξισώσεις

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y=-\frac{\beta}{\alpha}x.$$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x \cdot 4}{12} - \frac{y \cdot 1}{3} = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$$

και τελικά

$$x - y = 3.$$

Η εφαπτομένη της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

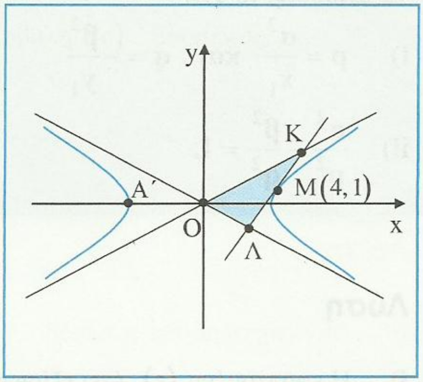
$$\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1.$$

ii) *α)* Οι συντεταγμένες των σημείων Κ και Λ είναι οι αντίστοιχες λύσεις των συστημάτων

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}.$$

και

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$



Δηλαδή,

$$K(6, 3) \quad \text{και} \quad \Lambda(2, -1).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{6+2}{2} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{3+(-1)}{2} = 1.$$

Άρα, το σημείο $M(4,1)$ είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ.

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{OK} = (6-0, 3-0) = (6, 3)$$

και

$$\overrightarrow{O\Lambda} = (2-0, -1-0) = (2, -1).$$

Άρα, το εμβαδό του τριγώνου ΟΚΛ είναι

$$(OK\Lambda) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{O\Lambda}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-6-6| = 6 \text{ τ.μ..}$$

Δίνεται η υπερβολή

$$c: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής (c).

ii) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες της (c) τέμνει τη (c) σε ένα ακριβώς σημείο.

Λύση

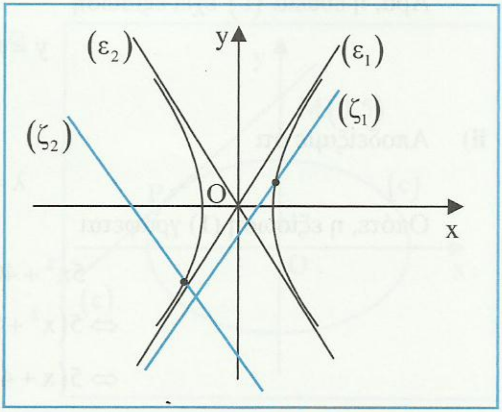
i) Οι ασύμπτωτες (ε_1) και (ε_2) της υπερβολής (c) έχουν εξισώσεις

$$x - \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

και

$$x + \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

αντίστοιχα.



ii) Οι ασύμπτωτες (ε_1) και (ε_2) έχουν συντελεστές διεύθυνσης 2 και -2 αντίστοιχα. Επομένως, κάθε ευθεία παράλληλη στην (ε_1) ή στην (ε_2) έχει αντίστοιχα εξίσωση της μορφής

$$\zeta_1 : y = 2x + \kappa \quad \text{και} \quad \zeta_2 : y = -2x + \kappa, \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}^*.$$

Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας (ζ_1) με την υπερβολή (c) είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2x + \kappa \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γίνεται

$$x^2 - \frac{(2x+\kappa)^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - (2x+\kappa)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - (4x^2 + 4\kappa x + \kappa^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow -4\kappa x - \kappa^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -4\kappa x = \kappa^2 + 1$$

Και επειδή

$$\kappa \neq 0$$

συμπεραίνουμε ότι η τελευταία εξίσωση (πρώτου βαθμού) έχει μία ρίζα (απλή) την

$$x = \frac{\kappa^2+1}{-4\kappa}.$$

Άρα, η ευθεία (ζ_1) τέμνει την υπερβολή (c) στο σημείο με τετμημένη

$$x = -\frac{\kappa^2+1}{4\kappa}$$

και τεταγμένη

$$y = 2\left(-\frac{\kappa^2+1}{4\kappa}\right) + \kappa = \frac{\kappa^2-1}{2\kappa}.$$

Ομοίως, η ευθεία (ζ_2) τέμνει την υπερβολή (c) στο σημείο με τετμημένη

$$x = \frac{\kappa^2+1}{4\kappa}$$

και τεταγμένη

$$y = -2\frac{\kappa^2+1}{4\kappa} + \kappa$$

$$= \frac{\kappa^2-1}{2\kappa}.$$